

**Ulrich Dickmann**

# **Johannes Kepler und seine drei Gesetze**



**Johannes Kepler  
(1571-1630)**

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	3
Einführung .....	3
Wer war Johannes Kepler? .....	4
Wie kam Kepler auf seine Gesetze? .....	4
Kepler und die Marsbahn .....	6
Die Kepler'schen Gesetze .....	7
1. Keplersches Gesetz: .....	7
2. Kepler'sches Gesetz: .....	8
3. Kepler'sches Gesetz: .....	8
Einfache Betrachtung .....	9
Eigenschaften der Ellipse .....	9
1. Kepler'sches Gesetz .....	11
2. Kepler'sches Gesetz .....	11
3. Kepler'sches Gesetz .....	12
Mathematisch-wissenschaftliche Betrachtung .....	12
Eigenschaften der Ellipse .....	12
3. Kepler'sches Gesetz .....	14
Kepler'sche Gesetze in der Gegenwart .....	15
Kepler'sche Gesetze in Celestia .....	15

## Vorwort

Um für Celestia eigene (fiktive) Sonnensysteme mittels SSC-Script zu programmieren sind u.a. entsprechende Bahnelemente (Orbitaldaten) für die Planeten und ggf. deren Satelliten erforderlich. Welche Daten erforderlich sind und wie diese in das Script eingebunden werden, können Sie in meinem „*Das große Celestia-Handbuch*“ nachlesen und soll daher nicht Bestandteil dieser Ausarbeitung sein.

Wenn man sich jedoch mit den Bahnelementen beschäftigt, stellt man sich die Frage, wann, wie und von wem die notwendigen Gesetzmäßigkeiten eigentlich entdeckt und definiert wurden und welche Gesetzmäßigkeiten es im einzelnen sind.

Erstaunt stellt man schließlich fest, dass die Gesetzmäßigkeiten der Himmelsmechanik keine Erfindung oder Entdeckung der Neuzeit ist, sondern bereits vor vielen hundert Jahren beschrieben wurden. Ein Pionier dabei war zweifellos Johannes Kepler, der mit seinen drei Gesetzen den Grundstein zum Verständnis der Himmelsmechanik gelegt hat. Er war schließlich der erste, der die Zusammenhänge richtig erkannt und beschrieben hat.

Zu Ehren dieser Meisterleistung des Herrn Kepler soll mit dieser Ausarbeitung seine Person und seine bahnbrechenden drei Gesetze etwas beleuchtet werden, die noch heute Grundlage die Raumfahrt und auch für die korrekte Definition von Objekten in der Weltraumsimulation Celestia sind.

Im o.g. „*Das große Celestia-Handbuch*“ konnte ich aus Platzgründen einzelnen Begriffe und Zusammenhänge nicht weiter erklären, da dies den Rahmen des Handbuches gesprengt hätte. Dies soll somit mit dieser Ausarbeitung nachgeholt werden.

Meine Recherchen zu dieser Ausarbeitung stammen ausnahmslos aus mannigfaltigen Informationen, die im Internet zu finden sind. Obwohl die gesammelten Informationen von mir durch Vergleich unterschiedlicher Quellen verifiziert wurden, kann ich dennoch keine Gewähr für die Richtigkeit der Angaben übernehmen. Sollten Ihnen also offenbar unrichtige Angaben oder Darstellungen in dieser Ausarbeitung auffallen, bitte ich um korrigierende Information.

## Einführung

Die Suche nach den Gesetzmäßigkeiten, die hinter den Bahnen der Planeten am Himmel stecken, dürfte wohl so alt wie die Menschheit sein. Denn schon die alten Babylonier und Ägypter bemühten sich, hinter dieses Geheimnis zu kommen. Dabei glaubte auch der griechische Astronom Claudius Ptolemäus (100-160), die Erde stünde im Mittelpunkt des Planetensystems.

Der Erste, der unser heutiges Verständnis des Planetensystems exakter formulierte, war der Astronom Nikolaus Kopernikus (1473-1543). Bei ihm trat die Sonne an die Stelle der Erde. Um die Sonne kreisen alle Planeten, also auch die Erde.

Es gab aber in beiden Theorien ein kleines Problem: Die Beobachtungen am Himmel wichen doch erheblich von den nach den Theorien berechneten Positionen der Planeten ab.

So wundert es nicht, dass die damaligen Astronomen vom neuen Weltbild eines Kopernikus nicht recht überzeugt waren und als falsch abtaten. Doch das Problem der Abweichungen ließ eine Person nicht ruhen: den deutschen Mathematiker und Astronom Johannes Kepler.

Kepler war wohl schon von Jugend an von den Planetenbewegungen fasziniert und wollte dem „kopernikanischen System“ zum Durchbruch verhelfen.

Obgleich Kepler vermutete, dass Kopernikus sich in Bezug auf die Annahme von rein kreisförmigen Umlaufbahnen um die Sonne irren müsse. Irgendetwas stimmte also nicht an dieser Theorie. Aber was genau stimmte da nicht?

Eine Frage, die nicht nur Johannes Kepler zu lösen suchte, sondern die auch den Celestia-Anwender brennend interessieren dürfte, wenn dieser in Celestia ein fiktives Sonnensystem programmieren möchte.

Wer also in Celestia ein eigenes Sonnensystem oder weitere Objekte für bestehende Sonnensysteme in Celestia programmieren möchte, kann sich mit dem vorliegenden Handbuch zunächst das allgemeine Wissen um die Mechanik der Himmelskörper aneignen und anschließend mit meinem „Handbuch zum .SSC-Scripting“ sein fiktives Sonnensystem für Celestia erstellen.

Die vorliegende Abhandlung soll natürlich kein Handbuch der hohen Mathematik sein, sondern lediglich einen kleinen Einblick die Himmelsmechanik darstellen. Dabei werden wir die Sache möglichst „unwissenschaftlich“ angehen und so gut es geht auf Fachbegriffe verzichten.

## Wer war Johannes Kepler?

Johannes Kepler war ein deutscher Astronom und Naturphilosoph. Er wurde am 27. Dezember 1571 in Weil (in der Nähe von Stuttgart) geboren und studierte Theologie an der Universität Tübingen.

Kepler akzeptierte die „kopernikanische Theorie“ und wurde ebenfalls ihr Vertreter. Im Jahre 1594 ging Kepler von Tübingen nach Graz und arbeitete dort eine komplexe geometrische Hypothese aus, um die Entfernungen zwischen den Planetenumlaufbahnen erklären zu können. Dies führte aber zunächst zu keinem zufriedenstellenden Ergebnis.

Kepler war von 1594 bis 1600 Professor für Mathematik und Astronomie an der Universität Graz. Im Zuge der „Gegenreformation“ wurde er schließlich mit seiner Familie aus Graz vertrieben. Er siedelte nach Prag über und wurde Mitarbeiter des dänischen Astronomen Tycho Brahe, der ebenfalls an einer Theorie für das Weltbild arbeitete.

Nach dem Tod von Brahe im Jahr 1601 übernahm Kepler die Anstellung als kaiserlicher Mathematiker und Hofastronom von Rudolf II.

Im Jahr 1612 ging Kepler als Mathematiker nach Österreich. 1615 bis 1620 verteidigte Kepler seine Mutter, die der Hexerei beschuldigt war, und erreichte ihre Freilassung.

1628 trat Kepler schließlich in die Dienste Wallensteins, deutscher Herzog und Feldherr im 30-jährigen Krieg (1618-1648).

Kepler starb am 15. November 1630 in Regensburg.

## Wie kam Kepler auf seine Gesetze?

Keplers Lehrmeister in Prag, Tycho Brahe, war Experte in der genauen Beobachtung der Planetenbahnen und er führte darüber genaue Aufzeichnungen. Allerdings fehlte ihm

offenbar die Fähigkeit, dafür ein theoretisches und stimmiges Fundament zu entwickeln und zu erklären.

Als Johannes Kepler um 1600 als Assistent zu Brahe kam, machte sich also Kepler mit seiner Begabung daran, diesen theoretischen Unterbau zu entwickeln.

Doch Brahe und Kepler kamen offenbar nicht besonders gut miteinander aus. Brahe hatte offensichtlich Angst, sein kluger junger Assistent könne ihn als führenden Astronom seiner Zeit verdrängen (wie berechtigt seine Angst war, erlebte Brahe aber nicht mehr).

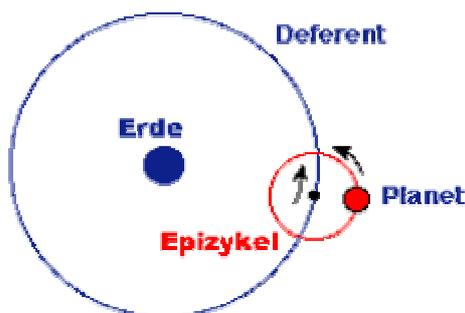
Er gab Johannes Kepler daher nur wenige Einblicke in einen Teil seiner umfangreichen Datensammlungen und setzte Kepler „nur“ darauf an, die Bewegung des Planeten Mars zu untersuchen, die wegen der von der Erde aus beobachtbaren sehr deutlichen Schleifen sehr schwierig und kompliziert zu sein schien und an der zuvor bereits Tycho selbst und einige andere seiner Mitarbeiter gescheitert waren.

Brahe erhoffte sich damit wohl, dass Kepler mit dieser Mars-Problematik derart beschäftigt sein würde, dass Brahe in Ruhe an seiner Theorie zum Aufbau des Sonnensystems arbeiten konnte.

Dass dieser Schuss nach hinten losging, hätte sich Brahe wohl nicht träumen lassen. Denn Kepler stieß gerade durch die Bewegung des Mars auf jene Gesetzmäßigkeiten, die für die Astronomie weit aus mehr Bedeutung haben sollten, als die von Brahe postulierten Annahmen.

Im Gegensatz zu Brahe, der sein eigenes System benutzte, benutzte Kepler das Kopernikanische System. Das Marsproblem erschien nur deshalb so schwierig, weil Kopernikus die Sonne in den Kreismittelpunkt gelegt hat und annahm, dass die Marsbahn ein Kreis ist.

Die Abweichungen von der Kreisbahn versuchte Kopernikus zunächst noch durch Epizyklen (Kreisbahnen, die sich selbst auf einer Kreisbahn [dem Deferent] bewegen; siehe Abbildung) auszugleichen.



Kepler versuchte lange die Marsbahn auch durch ineinandergeschachtelte Kreisbahnen (auf denen also auf den Epizyklen weitere Epizyklen aufgesetzt wurden) nach der Epizyklentheorie von Ptolemäus, die auch Kopernikus noch übernommen hatte, anzupassen.

Nachdem dies keinen Erfolg brachte (heute wundert das niemanden), ersetzte Kepler die Kreise durch abgeflachte Kreise, also Ellipsen. Dies machte er vor allem deshalb, weil der Mars von allen Planeten, von denen Brahe gute Beobachtungsdaten hatte, die ausgeprägteste Ellipsenbahn hat.

Zuerst stieß er aber auf sein "zweites Gesetz", als er die Bewegung der Erde untersuchte.

## Kepler und die Marsbahn

Eine erste Peilung des Mars vollzog Kepler schon am 5. September 1593. Sonne, Erde und Mars lagen auf einer exakten Geraden (Oppositionsstellung).

Kepler wollte sich daran machen, eine konkrete Planetenbahn zu vermessen. Er wollte, herausfinden, an welchem Ort im Raum sich ein Planet zu einer bestimmten Zeit aufhielt. Er wählte dazu den Planeten Mars.

Für seine Berechnungen hätte er eigentlich viele Beobachtungsdaten über lange Zeiträume hinweg benötigt. Die hatte er zu diesem Zeitpunkt aber noch nicht.

Hier halfen ihm später die Beobachtungsdaten von Brahe, über die Kepler ab 1600 als Mitarbeiter von Brahe teilweise verfügen konnte. Wie bereits erwähnt, wachte Brahe jedoch eifersüchtig über seinen kostbaren Schatz. Erst nach Brahens Tod (1601) hatte Kepler vollen Zugriff auf sämtlich Daten, die er benötigte.

Im September 1593 war Keplers Idee zu Bestimmung der Marsbahn recht simpel. Um den Mars in seiner Bahnposition zu bestimmen, musste er ihn eigentlich nur zu zwei verschiedenen Zeitpunkten anpeilen.

Aber Erde und Mars waren (damals wie heute) in ständiger Bewegung. Die Erde kreist in 365 Tagen einmal um die Sonne und der Mars, das ließ sich aus den Beobachtungsdaten bestimmen, in 687 Tagen.

Kepler kannte nun zwar die Umlaufzeiten, nur die konkrete Bahn des Mars war ihm noch völlig verborgen. Als erste Peilung wählte Kepler daher nun jenen Zeitpunkt, an dem Sonne, Erde und Mars auf einer exakten Geraden liegen: Astronomen nennen dies eine Opposition. Mars und Sonne stehen sich dann in einem Winkel von  $180^\circ$  exakt gegenüber, in "Opposition". Dies war am 5. September 1593 der Fall.

Die zweite Peilung des Mars führte Kepler also 687 Tage später am 24. Juli 1595 durch, als Mars wieder an derselben Bahnposition stand.

Die Erde stand an diesem Tag natürlich an einer anderen Stelle ihrer Bahn (und damit nicht mehr in Opposition). Der Winkel zwischen Sonne und Mars betrug an diesem Tag knapp  $91^\circ$ , das zeigten Keplers Messungen.

In die Konstruktionszeichnung eingetragen ergab sich der wahre Ort des Mars als der Schnittpunkt der beiden Peilungen. So bestimmte Kepler den ersten Punkt der Marsbahn. Im Lauf der Zeit kamen viele, viele andere dazu und eine Umlaufbahn zeichnete sich ab.

Erst zum Jahreswechsel 1605 (also mehr als 12 Jahre nach seiner ersten Positionsbestimmung) bestimmte Kepler endgültig die Werte der Marsbahn.

Dabei fand er heraus, dass die Marsbahn sehr stark von einem Kreis abweicht und vielmehr einen gestauchten Kreis, eine Ellipse, beschrieb. In einem der Ellipse-Brennpunkte (Fokus, siehe weiter unten) lag dabei die Sonne. Dies war das erste der drei Kepler'schen Gesetze.

Im weiteren Verlauf seiner Untersuchungen entwickelten sich die berühmten „drei Kepler'schen Gesetze der Planetenbewegung“.

Ohne diese Gesetze hätte Isaac Newton (1642-1727) rund sechzig Jahre später im Jahre 1687 nicht seine "Principia" schreiben können, in denen er den wahren Grund für die Planetenbewegung benennen konnte: Das allgemeine Gesetz der Schwerkraft.

Newton bedankt sich - ohne Kepler zu nennen - bei den "Titanen, auf dessen Schultern er stehe...". Einer dieser Titanen war sicher Johannes Kepler.

## Die Kepler'schen Gesetze

Johannes Kepler nahm also die Grundidee des heliozentrischen Weltsystems von Kopernikus auf und veränderte es zu einer praktikablen Theorie. Unter Verwendung der äußerst sorgfältig vom Tycho Brahe gemessenen Planetendaten, formulierte er die drei Kepler'schen Gesetze der Planetenbewegung.

**Das erste Gesetz** besagt, ...

... dass die Bahnen der Planeten Ellipsen sind, mit der Sonne in einem Brennpunkt.

**Das zweite Gesetz** sagt, ...

... wie die Planeten sich längs dieser Ellipsenbahn bewegen, in Sonnennähe schneller, in Sonnenferne langsamer.

Bei der Untersuchung der Bewegung des Mars fand Kepler die beiden ersten Gesetze und veröffentlichte sie 1609 in seinem Hauptwerk der "Astronomia Nova, Seu Physica Coelestis Tradita Commentariis De Motibus Stellae Martis".

Weitere Untersuchungen führten Kepler auf das berühmte dritte Grundgesetz der Planetenbewegung, 1619 veröffentlicht in "Harmonices Mundi Libri V".

**Das dritte Gesetz** ...

... gibt eine präzise Relation zwischen der Größe einer Planetenbahn und der Umlaufzeit des Planeten um die Sonne wieder.

Indem Kepler die klassische Theorie aufgab, dass Planeten sich auf aus Kreisen zusammengesetzten Bahnen mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegen, zeigte er, dass das Universum seinen eigenen Gesetzen gehorcht und nicht unbedingt den bis dahin (von anderen Astronomen) gemachten Vorgaben.

Schauen wir uns die Entwicklung der Gesetze im einzelnen nun noch etwa genauer an:

### 1. Keplersches Gesetz:

Bei seiner Arbeit in Prag stieß Kepler auf sein "Erstes Gesetz".

Er formulierte dazu bei der Beobachtung der Marsbahn folgendes:

*"Die Sache liegt daher einfach so: Die Planetenbahn ist kein Kreis; sie geht auf beiden Seiten allmählich herein und dann wieder bis zum Umfang des Kreises im Perigäum [der Punkt der Marsbahn, der der Erde am nächsten liegt] hinaus. Eine solche Bahnform nennt man ein Oval."*

Heute würde man es folgendermaßen formulieren:

„Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.“

## 2. Kepler'sches Gesetz:

Sein "Zweites Gesetz" liest sich so:

*"Unvollkommenes, jedoch für die Sonnen- oder Erdbahn ausreichendes Verfahren zur Berechnung der Gleichungen auf Grund der physikalischen Hypothese. Da ich mir bewußt war, daß es unendlich viele Punkte auf dem Exzenter [außerhalb des Mittelpunktes liegende angebrachte Steuerungsscheibe] und entsprechend unendlich viele Abstände gibt, kam mir der Gedanke, daß in der Fläche des Exzenters alle diese Abstände enthalten seien."*

Heutzutage würde man es wie folgt formulieren:

„Der Quotient aus der von einem Leitstrahl überstrichenen Fläche und der dazu erforderlichen Zeit ist konstant; d.h. der Leitstrahl zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen, beziehungsweise ein Planet bewegt sich in Sonnennähe schneller als in Sonnenferne.“

## 3. Kepler'sches Gesetz:

Hierzu schrieb Kepler:

*"Allein es ist ganz sicher und stimmt vollkommen, daß die Proportion, die zwischen den Umlaufzeiten irgendzweier Planeten besteht, genau das Anderthalbe der Proportion der mittleren Abstände, d.h. der Bahnen selber, ist."*

Mit anderen Worten:

„Die Quadrate der Umlaufzeiten (T) zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände (a) von der Sonne“.

Oder mit einer mathematischen Formel ausgedrückt:

$$T^2 / a^3 = \text{Konstante}$$

Das dritte Gesetz beschreibt also die Entdeckung, dass Umlaufzeit und Entfernung zur Sonne in einem komplizierten Zusammenhang stehen.

Es entstand aus dem Vergleich folgender Aufzeichnungen:

Planet	Umlaufzeit in Jahren	Quadrat der Umlaufzeit	mittlere Entfernung zur Sonne	Kubus der mittleren Entfernung
Merkur	0,241	0,058	0,387	0,058
Venus	0,615	0,378	0,723	0,378
Erde	1,000	1,000	1,000	1,000
Mars	1,881	3,538	1,524	3,540
Jupiter	11,860	140,660	5,203	140,852
Saturn	29,460	867,892	9,539	867,978

Das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten entspricht dem Kubus seiner mittleren Entfernung zur Sonne. Die minimalen Differenzen haben als Ursache gegenseitige Störungen, die gerade bei den Riesenplaneten deutlich werden. Mit dieser Einschränkung ist das Gesetz aber auch für die zu dieser Zeit noch unentdeckten Uranus, Neptun und Pluto gültig.

Kepler fand dieses 3. Gesetz eigentlich schon im März 1618, verwarf es aufgrund von Rechenfehlern aber zuerst, bis er es im Mai 1618 noch einmal prüfte und die Übereinstimmungen beinahe für einen Traum hielt.

Er hatte den Einblick auf das Räderwerk der Planeten gefunden, den er schon im "Mysterium Cosmographicum" gesucht hatte. Die erkannte Gesetzmäßigkeit will er jedoch noch weiterführen:

*“Meine Absicht dabei ist, aufzuzeigen, daß die Himmelsmechanik nicht einem göttlichen Gefüge, sondern eher einem Uhrwerk verglichen werden muß... insofern nämlich, als all die vielfältigen Bewegungen mittels einer einzigen, recht einfachen magnetischen Kraft erfolgen, wie bei einem Uhrwerk alle Bewegung durch ein schlichtes Gewicht bewirkt werden.”*

Die Kepler'schen Gesetze gelten indes nur annäherungsweise. Sie wären nur dann exakt gültig, wenn die Massen der Planeten gegenüber der Sonnenmasse als vernachlässigbar klein betrachtet und die Anziehungskräfte der Planeten untereinander vernachlässigt werden könnten. Die Gravitationskräfte der Objekte (wie sie Isaac Newton später formulierte) spielen jedoch eine nicht ganz unwichtige Rolle.

Deshalb wird heute der Berechnungsformel des 3. Kepler'sche Gesetzes eine Konstante für die Gravitationskraft hinzugefügt. Diese Konstante ist für alle Planeten und Satelliten gleich, jedoch unterscheidet sich die Konstante für die Planeten und die Konstante für Satelliten!

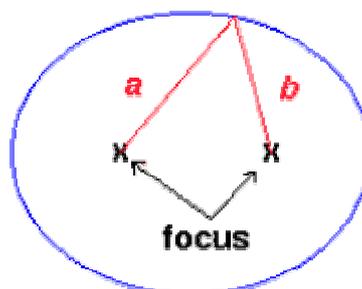
Das 3. Gesetz in seiner ursprünglichen Auslegung kann daher nur als Grundlage dienen und nicht als exakte und gebrauchsfertige (anwendbare) Berechnungsformel.

In Celestia ist aber das 3. Gesetz das wichtigste, denn mit diesem Gesetz werden letztlich die Bahndaten bestimmt, die in Celestia für die einzelnen Objekte zu definieren sind.

## Einfache Betrachtung

### *Eigenschaften der Ellipse*

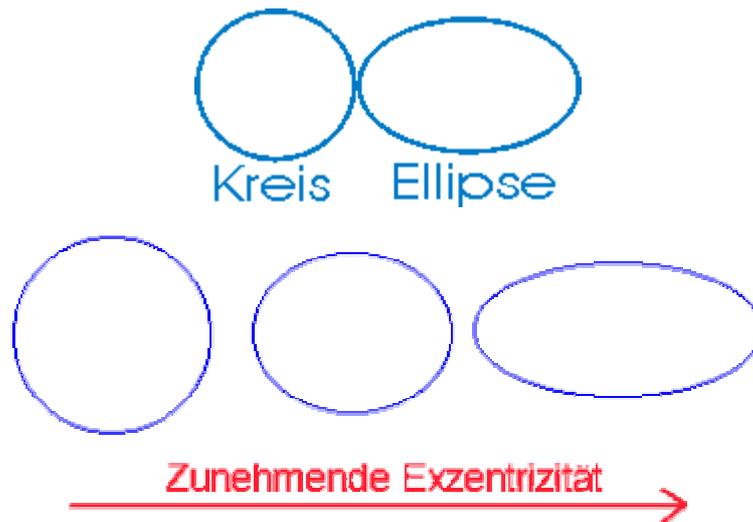
Eine Ellipse hat zwei spezielle Punkte, die Brennpunkte (lat: focus). Für jeden beliebigen Punkt auf der Ellipse ist die Summe der beiden Abstände zu den beiden Brennpunkten konstant (also immer gleich).



Also:  $a + b = \text{konstant}$

Das Maß der Abflachung einer Ellipse nennt man Exzentrizität. Diese Exzentrizität wird abgekürzt mit  $\epsilon$ .

Hier sieht man Ellipsen mit nach rechts anwachsender Exzentrizität. Einen Kreis kann man dabei als Ellipse mit der Exzentrizität Null auffassen ( $\epsilon = 0$ ).

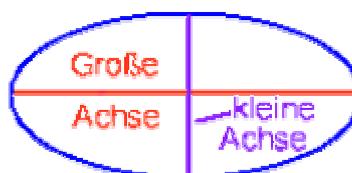


Die Exzentrizitäten von Ellipsen liegen zwischen 0 und 1.

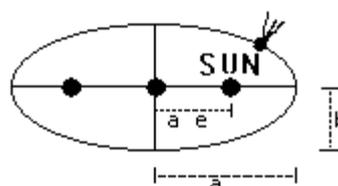
**Achtung:** Der Wert 1 beschreibt bereits eine sog. Parabel, die nicht geschlossen ist. Eine Ellipse kann somit maximal den Wert 0,9999... aufweisen.

Die Ellipsenbahnen der meisten Planeten sind nahezu Kreise (Exzentrizität bis 0,05). Nur bei Mars und Pluto erkennt man an der Bahn deutlich eine Ellipse mit von Null unterschiedlicher Exzentrizität (Mars: rd. 0,09 / Pluto rd. 0,25).

Die lange Achse einer Ellipse heißt „große Achse“, die andere logischerweise „kleine Achse“, die Hälfte davon „große bzw. kleine Halbachse“.



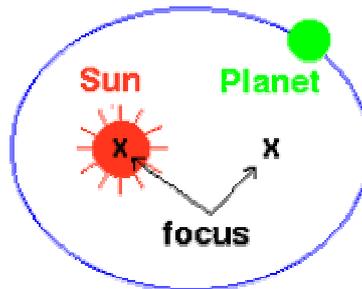
Es kann gezeigt werden, dass der durchschnittliche Abstand eines Planeten von der Sonne gleich der großen Halbachse ( $a$ ) ist:



## 1. Kepler'sches Gesetz

**Die Planetenbahnen sind Ellipsen, mit der Sonne in einem Brennpunkt.**

Die Sonne befindet sich also nicht in der Mitte der Ellipsenbahn, sondern in einem Brennpunkt (der andere Brennpunkt ist leer!). Der Planet folgt dieser Ellipse auf seiner Umlaufbahn, was bedeutet, dass der Abstand zur Sonne sich laufend ändert.



Daraus ergeben sich einige Konsequenzen für die Erde:

Ein Halbjahr mit größerer Sonnenferne (Sommer auf der Nordhalbkugel) ist länger als das andere Halbjahr, wenn man das Jahr durch den Frühlings- und Herbstpunkt (Übergang der Sonne über den Äquator) in zwei Halbjahre teilt.

## 2. Kepler'sches Gesetz

**Die Verbindungslinie zwischen Planet und Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.**

Der Planet bewegt sich also unterschiedlich schnell. In Sonnennähe ist der Planet schneller als in Sonnenferne. Der Sonnennächste Punkt heißt Perihel, der Sonnenfernste Punkt Aphel.



Für die Erde bedeutet dies, dass sie im Sommer (auf der Nordhalbkugel) langsamer ist, da sie weiter von der Sonne entfernt ist.

Aus diesem Grund und wegen der größeren Strecke ist auf der Nordhalbkugel auch der Zeitraum Frühling/Sommer um einige Tage länger als der Zeitraum Herbst/Winter.

### 3. Kepler'sches Gesetz

**Das Verhältnis der Quadrate der Umlaufzeiten zweier verschiedener Planeten ist genau so groß wie das Verhältnis der dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.**

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

Dieses Gesetz vergleicht die Umlaufzeiten verschiedener Planeten um das gleiche Zentralgestirn. Planeten mit größerer Sonnenferne brauchen wesentlich länger für einen Umlauf als nahe Planeten.

So benötigt etwa der sonnennächste Planet Merkur nur 88 Tage für einen Umlauf, das ist weniger als ein Merkurtag, wohingegen der sonnenferne Pluto für einen Umlauf stolze 248 Jahre benötigt.

Mit der Formel des 3. Gesetzes kann also das Ausmaß der Ellipse (die sog. „mittlere Bewegung“) eines Planeten oder sonstiger Objekte an Hand der großen Halbachse definiert werden.

Oder andersherum, kann damit an Hand der Umlaufzeit die Länge der großen Halbachse bestimmt werden. Es lässt sich also an Hand der Umlaufzeit errechnen, wie weit ein Objekt von seinem Zentralobjekt im Apogäum (oder Aphel, wenn das Objekt um eine Sonne kreist) entfernt ist.

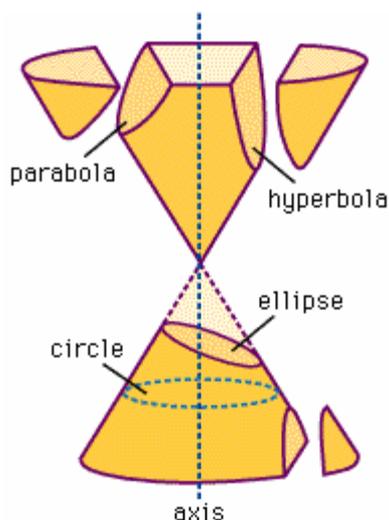
$$\text{Umlaufzeit}^2 = \text{Länge der Halbachse}^3$$

Wie bereits weiter oben angemerkt, handelt es sich bei dieser Formel um eine Annäherung, denn die Anziehungskräfte zwischen den Planeten und der Sonne bleiben unberücksichtigt.

## Mathematisch-wissenschaftliche Betrachtung

### *Eigenschaften der Ellipse*

Die Ellipse, die Form eines abgeflachten Kreises, war schon den alten Griechen gut bekannt. Sie gehört zur Familie der "Kegelschnitte", dessen Kurven beim Schnitt einer Ebene und eines Kegels entstehen:



Die Zeichnung zeigt, wenn die Ebene...

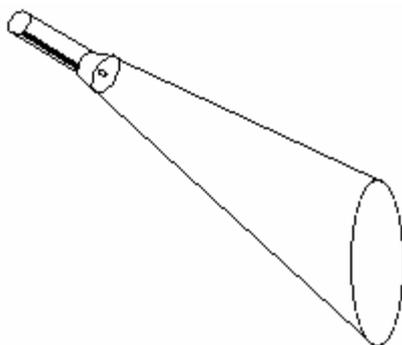
... senkrecht zur Kegelachse liegt, ergibt sich ein Kreis (circle).

... etwas geneigt ist, ergibt sich eine Ellipse (ellipse).

... so sehr geneigt ist, dass sie parallel zu einer Kegelwand liegt, ergibt sich eine Parabel (parabola).

... noch mehr geneigt ist, ergibt sich eine Hyperbel (hyperbola).

Diese Schnitte können leicht mit einer Taschenlampe in einem abgedunkelten Raum (Zeichnung unten) erzeugt werden. Die Lampe erzeugt einen Lichtkegel und wenn dieser auf die Wand trifft ergibt die entstandene Form einen Kegelschnitt -- den Schnitt eines Lichtkegels mit einer flachen Wand.



Die Achse der Taschenlampe ist auch gleichzeitig die Achse des Lichtkegels. Richten Sie das Lichtbündel senkrecht zur Wand, um einen Kreis zu erhalten.

Neigen Sie das Bündel, entsteht eine Ellipse.

Neigen Sie es noch weiter, so dass es scheint, dass die Ränder des Lichtflecks sich nicht mehr treffen können, ergibt sich eine Parabel.

Wenn Sie das Bündel weiterneigen, so dass die Ränder scheinbar in unterschiedliche Richtungen laufen, erhält man eine Hyperbel.

### 3. Kepler'sches Gesetz

Schauen wir uns hierzu zunächst noch einmal Kepler's Formulierung an:

*"Allein es ist ganz sicher und stimmt vollkommen, daß die Proportion, die zwischen den Umlaufzeiten irgendzweier Planeten besteht, genau das Anderthalbe der Proportion der mittleren Abstände, d.h. der Bahnen selber, ist."*

Für ein einzelnes Objekt lässt sich daraus folgende Formulierung ableiten:

Das Quadrat der Umlaufzeit  $T$  ist proportional zur dritten Potenz des mittleren Abstandes zur Sonne  $a$  (die Hälfte der Summe aus größtem und geringstem Abstand = große Halbachse).

Drücken wir diesen Satz nun als mathematische Formel aus:

$$T^2 = k \times a^3$$

$k$  stellt dabei ein Konstante dar, die für alle Planeten gleich ist.

Angenommen wir messen alle Entfernungen in "astronomischen Einheiten" (AE) mit 1 AE als mittlere Entfernung zwischen Erde und Sonne.

Mit  $a = 1$  AE und  $T = 1$  Jahr ergibt sich für  $k$  bei diesen Einheiten der Wert 1. Somit sind wir wieder bei der Ausgangsformel:  $T^2 = a^3$ .

Wendet man nun die Formel auf jeden anderen Planeten an, dessen Umlaufzeit ( $T$ ) aus jahrelangen Beobachtungen bekannt ist, ist der mittlere Sonnenabstand des Planeten ( $a$ ) leicht zu bestimmen.

Die Bestimmung des Wertes von 1 AE in Kilometern, um die tatsächlichen Ausmaße des Sonnensystems zu finden, ist allerdings nicht so leicht. Im Mittel geht man von 150.000.000 km aus. Ganz genau sind es jedoch 149.597.870 km.

<b>Keplers drittes Gesetz</b>				
<b>T in Jahren, a in Astronomischen Einheiten; dann gilt <math>T^2 = a^3</math></b>				
Abweichungen ergeben sich durch die beschränkte Genauigkeit				
<b>Planet</b>	<b>Umlaufzeit T</b>	<b>Dist. a von der Sonne</b>	<b><math>T^2</math></b>	<b><math>a^3</math></b>
<b>Merkur</b>	0.241	0.387	0.05808	0.05796
<b>Venus</b>	0.616	0.723	0.37946	0.37793
<b>Erde</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>Mars</b>	1.88	1.524	3.5344	3.5396
<b>Jupiter</b>	11.9	5.203	141.61	140.85
<b>Saturn</b>	29.5	9.539	870.25	867.98
<b>Uranus</b>	84.0	19.191	7056	7068
<b>Neptun</b>	165.0	30.071	27225	27192
<b>Pluto</b>	248.0	39.457	61504	61429

Spätere Wissenschaftler haben Kepler's Gesetz nicht nur bestätigt und erklärt, sondern auf alle orbitale Systeme aus zwei Körpern angewandt - sogar auf künstliche Satelliten in Umlaufbahnen um die Erde.

Die Konstante  $k'$  für künstliche Satelliten unterscheidet sich jedoch von der Konstante  $k$ , die für Planeten gilt. Aber auch die Konstante für Satelliten ist für alle Satelliten gleich.

Keplers Formel für Satelliten lautet nun (vereinfacht) wie folgt:

$$T = \sqrt{k' a^3}$$

( $\sqrt{\quad}$  steht für Quadratwurzel)

Wird  $T$  in Sekunden gemessen und  $a$  in Erdradien (1 Erdradius = 6371 km) gilt:

$$T = 5063 \times \sqrt{a^3}$$

Um die Umlaufbahn eines künstlichen Satelliten nun für Celestia ganz genau zu berechnen, muss man darüber hinaus noch die Gravitationskonstante ( $G$ ) und die Masse des Planeten ( $M$ ) berücksichtigen.

$$T = (5063 \times \sqrt{a^3}) / (G \times M)$$

Wer eine solche Umlaufbahn berechnen möchte, sollte sich im Celestia-Forum erkundigen, wie die Formelwerte in Bezug auf den entsprechenden Planeten genau zu berechnen sind. In der Regel kann dort z.B. Herr Grant Hutchison sehr versiert Auskünfte erteilen.

## Kepler'sche Gesetze in der Gegenwart

Die "Kepler'schen Gesetze" stellen wohl jenes Faktum dar, das am ehesten mit den großen Astronomen verbunden wird. Und das nicht zu Unrecht, denn man kann mit ihnen nicht nur Bewegungen von Planeten, Monden oder Sternen berechnen, sondern auch die Bewegungen (Flugbahnen) von Flugkörpern aus Menschenhand, wie z.B. von Satelliten und Raumschiffen.

Bewundernd müssen wir uns vor Augen führen, dass die Formulierung dieser Gesetze die Leistung eines Einzelnen war. Kepler fand sie schließlich nach enormen Anstrengungen und etlichen Irrwegen heraus. Und dies ist sicherlich eine Leistung, die ihrer Zeit weit voraus war.

Keplers Gesetze stellen eigentlich die ersten Naturgesetze im modernen wissenschaftlichen Sinn dar, obwohl sie längere Zeit kaum Beachtung fanden. Übrigens auch nicht durch Kepler selbst, der sie als Rechenregeln verwendete, um seine Planetentafeln aufzustellen und seine Theorien der Harmonie der Welt zu stützen.

Erst Isaac Newton erkannte etwa 50 Jahre nach Keplers Tod ihren Wert und fand mit ihrer Hilfe sein berühmtes Gravitationsgesetz. Die Bezeichnung als "Kepler'sche Gesetze" verfestigte sich erst noch später.

## Kepler'sche Gesetze in Celestia

Und was nützen uns die Kepler'schen Gesetze nun in Celestia?

Als schlichter Anwender/Benutzer brauchen Sie natürlich keine Kenntnis dieser Gesetze, denn diese sind quasi schon in Celestia bzw. in den Datensätzen (.SSC-Dateien)

einprogrammiert. Alle in Celestia eingebundenen Planeten, Monde, Satelliten und sonstige Objekte verfügen über Bahndaten (sog. Bahnelemente), die auf Johannes Kepler's Erkenntnisse zurückgehen.

Mit diesen Bahnelementen wird in Celestia festgelegt, wo sich ein Objekt innerhalb eines (beliebigen) Sonnensystems aufhält und wie sein Orbit (also die Umlaufbahn) verläuft. In einem solchen Datensatz für die Bahndaten eines Objekt finden sich also Angaben wieder über die Ellipsenform, die Exzentrizität, die Position des Objektes zu einem bestimmten Zeitpunkt, die Umlaufzeit und so weiter.

Diese Informationen sind in Celestia-Dateien mit der Dateierweiterung (Extension) `.ssc` gespeichert. Derartige Dateien finden Sie im Ordner `Celestia\data\` oder auch (wenn Sie Add-Ons installiert haben) in `Celestia\extras\`.

Um als schlichter Anwender Celestia zu betreiben, können Ihnen die Bahndaten egal sein, denn alles ist gebrauchsfertig aufbereitet. Dennoch bringt die Kenntnis über die Gesetzmäßigkeiten Vorteile, denn damit können Sie die „Himmelsmechanik“ besser oder vielleicht sogar überhaupt erst nachvollziehen.

Warum vollzieht der Mars von der Erde aus gesehen so merkwürdige Bahnen am Firmament und bewegt sich gelegentlich in die andere Richtung (retrograd)? Das ist eine Frage, die sich (wie Sie jetzt wissen) auch Kepler schon gestellt hat, und die Sie heute locker beantworten können, ohne mathematische Formel nachvollziehen zu müssen.

Können Sie nicht? Natürlich können Sie! Schauen Sie sich in Celestia mal die Umlaufbahnen der inneren Planeten (Merkur, Venus, Erde und Mars) um die Sonne an (Ansicht des Sonnensystems von oben mit aktivierten Planetenorbits und beschleunigtem Zeitverlauf). Mit den Kepler'schen Gesetzen können Sie leicht erklären, warum sich die Planeten unterschiedlich schnell um die Sonne bewegen und warum sich z.B. Mars und Erde manchmal bei ihrer „Begegnung“ im Weltraum mal näher und mal weiter entfernt gegenüber stehen. Sie sehen auch, dass die Erde den Mars „überholt“ (weil sie näher um die Sonne kreist und nach Kepler demnach schneller als der Mars sein muss und ist) und aus Blick von der Erde bei diesem Überholmanöver der Mars sich scheinbar für einige Zeit entgegen seiner „Flugrichtung“ bewegt (was man früher mit Epizyklen [siehe weiter oben] zu erklären suchte).

Wenn Sie selbst fiktive Sonnensysteme programmieren möchten, ist die Kenntnis der Gesetze von entscheidender Bedeutung. Denn nur wenn Sie wissen, wie sich die Planeten usw. im Verhältnis zum Zentralgestirn verhalten, können Sie überhaupt ein funktionierendes Sonnensystem erschaffen (also mit einem entsprechenden SSC-Script programmieren). Sonst würden Sie vielleicht ein Sonnensystem gestalten, dessen Planetenbahnen völlig entgegen allen Gesetzmäßigkeiten verlaufen würden. Das wäre zwar in einer Simulation (wie Celestia) möglich, macht aber wenig Sinn.

Natürlich müssen Sie sich heutzutage nicht mehr mit der Berechnung von Bahndaten herumschlagen, wenn Sie neu entdeckte Objekte in Celestia einbinden möchten. Die erforderlichen Informationen und Daten werden z.B. von der NASA im Internet bereitgestellt und Sie brauchen die maßgeblichen Daten für Celestia nur zu übernehmen. Wie Sie dies machen, soll und kann nicht Bestandteil dieser Abhandlung sein. Dazu verweise ich auf mein „*Das große Celestia-Handbuch*“, welches Sie auf meiner Website <http://www.celestia.info/> in der Rubrik „Dokumentation“ erhältlich ist.

Neu entdeckte Himmelskörper werden meist von eifrigen Celestia-Fans recht schnell für Celestia in Form eines Add-Ons oder eines Script bereitgestellt. Als der Kleinplanet „Sedna“ entdeckt worden war, dauerte es keine fünf Tage (!), bis die Bahndaten im Celestia-Forum abrufbar und so aufbereitet waren (.SSC-Script), dass man den SSC-Datensatz nur noch kopieren musste.